

Варченко И. С., ассистент
Украинская инженерно-педагогическая академия

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕРАЗРЕЗНОГО БАРАБАНА ПРИ МНОГОСЛОЙНОЙ НАВИВКЕ КАНАТА

varchenko_ivan86@mail.ru

В статье изложено теоретическое исследование напряженного состояния цилиндрической оболочки канатного барабана при навивке стального каната в несколько слоев. Исследуется поведение барабана в зоне упругости. В результате анализа поведения цилиндрической оболочки и реборды барабана получено напряженно-деформированное состояние барабана. Теоретические исследования, которые базируются на уравнении цилиндрической оболочки С.П. Тимошенко, решаемые по теории Герца о статическом деформировании контактирующих объектов, сравниваются с результатами эксперимента, которые были получены путем тензометрических измерений напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки канатного барабана.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, стальной канат, напряженность оболочки, тензометрия, деформация стенки цилиндрической оболочки, контактные напряжения.

1. Введение

В подъемно-транспортной технике широкое применение находит многослойная навивка. Однако существуют нерешенные задачи, которые являются камнем преткновения для внедрения многослойной навивки в ряд областей подъемной техники. Главной проблемой навивки каната в несколько слоев является повышенный износ каната. Именно замена каната является основной частью затрат на обслуживание подъемной установки. Известны случаи, когда стоимость каната приравнивалась к стоимости всей подъемной установки без каната. Такие случаи встречаются в шахтном подъеме, где длины канатов, достигают десятки километров. Поэтому повышение рабочего ресурса подъемного каната при многослойной навивке является актуальной сферой исследований. Решение данной задачи заключается в устранении критических мест, где и происходит повышенный износ каната. Критические места образуются при перегибе и защемлении каната между соседними витками и лобовиной канатного барабана, при формировании вышних слоев. Поэтому необходимо исследовать канатный барабан на предмет его взаимодействия с канатом. Исследуется поведение барабана в зоне упругости. В результате анализа поведения цилиндрической оболочки и реборды барабана получаем напряженно-деформированное состояние барабана. Теоретические исследования, которые базируются на уравнении цилиндрической оболочки С.П. Тимошенко, решаемые по теории Герца о статическом деформировании контактирующих объек-

тов, сравниваются с результатами эксперимента, которые были получены путем тензометрических измерений напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки канатного барабана.

2. Постановка задачи.

При исследовании напряженно-деформированного состояния неразрезного барабана, являющегося оболочечным элементом конструкции, при многослойной навивке большое значение имеет задача контактного взаимодействия барабана с канатом. Необходимость исследований таких процессов возникает в связи с распространенностью такого рода механизмов в современном подъемно-транспортном и машиностроении, а также весьма слабой изученностью проблемы, в частности при многослойной навивке каната на барабан. Так же является актуальным вопрос оптимизации конструкции барабана при многослойной навивке. Особый интерес представляет закономерность напряженно-деформированного состояния барабана в зависимости от числа витков каната. В частности как обечайки так и каната.

3. Напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки неразрезного барабана.

Для исследования напряженно-деформированного состояния барабана будем использовать уравнения цилиндрической оболочки С.П. Тимошенко:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1-\mu^2}{Eh} \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1-\mu^2}{Eh} \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ K \frac{1-\mu}{2} \left(\Delta w + \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{R} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right) &= \frac{1-\mu^2}{Eh} \left(\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P \right); \\ \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial y^2} \right) + \frac{1+\mu}{2} \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial y} - K \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \right) &= \frac{1-\mu^2}{Eh} \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2}; \\ \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^2 \beta_y}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x \partial y} \right) - K \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \right) &= \frac{1-\mu^2}{Eh} \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где u, v, w - компоненты перемещения точек срединной поверхности цилиндрической оболочки барабана; β_x, β_y - углы поворота в направлении координатных осей; x - координата вдоль оси барабана; $y = R \cdot \theta$ - координата, направленная по касательной к окружности ($\theta = 0 \div 2\pi$); t - время; R - радиус срединной поверхности; h - толщина оболочки; ρ - плотность материала; μ - коэффициент Пуассона ($\mu = 0.3$); E - коэффициент упругости

($E = 2.1 \cdot 10^5$ МПа); $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор

Лапласа; $K_1 = \frac{\pi^2}{12}$ - коэффициент сдвига;

$$K = K_1 \frac{1-\nu}{2}.$$

Применяя операторный метод Лурье, приведем уравнения (1) к виду, который позволит выразить u, v, β_x, β_y через w :

$$\begin{aligned} &\left[\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\Delta - \frac{1}{K} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\Delta - \frac{2}{1-\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\Delta - \frac{2}{1-\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \times \right. \\ &\times \left(\Delta - \frac{1+K}{1+K^2(1+12R^3/h^3)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{1+K^2(1+12R^3/h^3)}{1+K} - \left. \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - K \right) \times \right. \\ &\times \left. \left\{ \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\mu}{1-\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (2+\mu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{1-\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right\} \right] w = \\ &= \frac{1-\mu^2}{E} \frac{R^2}{h^2} \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - K \right) \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\Delta - \frac{2}{1-\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) P, \\ &\left[\Delta^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{3-\mu}{1-\mu} \Delta - \frac{2}{1-\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right] u = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w^2}{\partial y^2} + (2+\mu) \frac{\partial w^2}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{2\mu}{(1-\mu)R} \frac{\partial w}{\partial x^2} \right), \\ &\left[\Delta^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{3-\mu}{1-\mu} \Delta - \frac{2}{1-\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right] v = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial w^2}{\partial y^2} + (2+\mu) \frac{\partial w^2}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{2\mu}{(1-\mu)R} \frac{\partial w}{\partial y^2} \right), \\ &\left[\Delta - \frac{K_1}{h^2/12} - \frac{2}{1-\mu} \frac{\partial}{\partial t^2} \right] \beta_x = \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\partial}{\partial x} \{Q\} \\ &\left[\Delta - \frac{K_1}{h^2/12} - \frac{2}{1-\mu} \frac{\partial}{\partial t^2} \right] \beta_y = \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\partial}{\partial y} \{Q\} \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$Q = \Delta w + \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{K_1}{h^2/12} w - \frac{1}{K} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R^2} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{1}{K} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Воспользуемся синус преобразованием Фурье по координатам x и y

$$F(x, y, t) = \sum_m \sum_n f_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{R}\right), \quad (3)$$

где l - расстояние от точки приложения нагрузки до заделки.

По времени применяем преобразование Лапласа

$$F(x, y, p) = \int_0^\infty f(x, y, t) e^{-pt} dt, \quad (4)$$

где $p = i\sigma$.

Тогда нормальное перемещение срединной поверхности оболочки от взаимодействия с канатом примет вид:

$$w(x, y, p) = \sum_m \sum_n a_{mn}(p) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{R}\right). \quad (5)$$

Составляющая давления на оболочку от навивающегося каната примет вид:

$$P(x, y, p) = \sum_m \sum_n q_{mn}(p) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{R}\right). \quad (6)$$

Подставив выражения (5)-(6) в первое уравнение системы (2), получим выражение для нахождения коэффициентов a_{mn} . Упростим

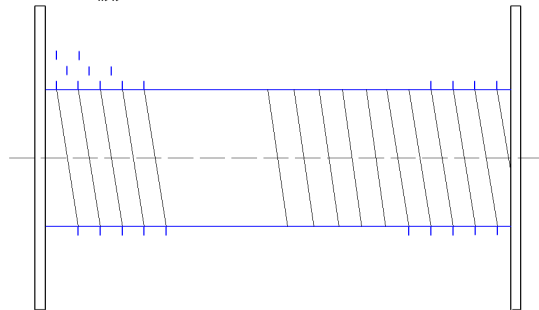


Рис. 1. Закон распределения давления от навивающегося каната по площадке контакта с цилиндрической оболочкой барабана

или

$$q_{mn}(t) = \frac{q_{cr}}{lR} \int_0^{R \sin \omega t} \int_0^{l \sin \omega t} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{R}\right) dx dy =$$

часть выражений полученных при преобразовании для соблюдения регламента размера статьи.

Представим последнее выражение в виде:

$$a_{mn}(p) = \frac{L^{(2)}(m, n, p)}{L^{(1)}(m, n, p)} \cdot q_{mn}(p). \quad (7)$$

Предположим, что составляющая давления от каната распределена равномерно по площадке контакта шириной k (рисунок 1) равномерно $P(x, y, t) = q_{cr}$ по области F , которая представляет собой спираль вокруг цилиндрической оболочки барабана:

$$F: x = st, y = R \sin \omega t, z = R \cos \omega t,$$

$$\frac{s}{\omega} = \frac{h}{2\pi}, \quad (8)$$

h - шаг винтовой линии; q_{cr} - радиальная нагрузка сердечника от r -го слоя навивки каната [1]; $r=1, \dots, 5$ - слои навивки каната на барабан;

Тогда

$$q_{mn}(t) = \frac{q_{cr}}{lR} \iint_F \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{R}\right) dx dy, \quad (9)$$

где F - область контакта каната с барабаном.

Для вычисления (9) были использованы функции Бесселя и функции Струве. Бесселевы функции и функции Струве являются трансцендентными функциями, не выражающимися через элементарные функции.

Имеем:

$$J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+2k}}{k! \Gamma(k+\alpha+1)} \quad \text{функция Струве}$$

$$H_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(k+\alpha+\frac{3}{2}\right)} \quad \text{функция Бесселя}$$

где $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$ - гамма-функция.

Окончательные выражения для коэффициентов $a_{mn}(p)$ имеют вид:

$$a_{mn}(t) = L^{-1} \left[\frac{L^{(2*)}(m, n, p)}{L^{(1)}(m, n, p)} \right] * L^{-1} [P(p)] = \int_0^t \sum_{j=1}^8 A_j \cdot e^{S_j(t-t_1)} \cdot P(t_1) dt_1, \quad (11)$$

$$\text{где } L^{-1} \left[\frac{L^{(2*)}(m, n, p)}{L^{(1)}(m, n, p)} \right] = \sum_{j=1}^8 \frac{L^{(2*)}(m, n, s_j)}{\prod_{q=1}^8 (s_j - s_q + \delta_{jq})} e^{S_j \cdot t} = \sum_{j=1}^8 A_j \cdot e^{S_j \cdot t};$$

$(s_q, s_j) = (a_q + ib_q, a_j + ib_j)$ - корни характеристического уравнения восьмого порядка $L^{(1)}(m, n, p) = 0$; δ_{jq} - символ Кронекера.

Беря по частям интеграл (11), получаем для $t = q\tau$:

$$\begin{aligned} a_{mn}(q\tau) &= \int_0^{q\tau} \sum_{j=1}^8 A_j \cdot e^{S_j(q\tau-t_1)} \cdot P(t_1) dt_1 = \\ &= \sum_{k=1}^q \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} \sum_{j=1}^8 A_j \cdot e^{a_j(q\tau-t_1)} \cdot (\cos a_j(q\tau-t_1) + i \sin a_j(q\tau-t_1)) \cdot P(t_1) dt_1 = \\ &= \sum_{j=1}^8 \sum_{k=1}^q A_j \left\{ P_k \left[\frac{U_{k,j}}{D_j} \left(1 + \frac{b_j}{a_j} \right) + (H_{k-1,j} - H_{k,j}) \left(\frac{1}{D_j} - \frac{b_j}{D_j a_j \delta} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{U_{k,j}}{D_j} - \frac{U_{k-1,j}}{D_j} \right) \left(\frac{a_j}{D_j \delta} - \frac{b_j^2}{D_j a_j \delta} + \frac{2b_j}{D_j \delta} \right) - \frac{H_{k,j}}{a_j} \right] - P_{k-1} \left[\frac{U_{k-1,j}}{D_j} \left(1 + \frac{b_j}{a_j} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (H_{k-1,j} - H_{k,j}) \left(\frac{b_j}{D_j a_j \delta} - \frac{1}{D_j} \right) + \left(\frac{U_{k,j}}{D_j} - \frac{U_{k-1,j}}{D_j} \right) \left(\frac{a_j}{D_j \delta} - \frac{b_j^2}{D_j a_j \delta} + \frac{2b_j}{D_j \delta} \right) - \frac{H_{k-1,j}}{a_j} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$U_{k,j} = e^{a_j \tau (q-k)} [b_j \cos b_j \tau (m-k) - a_j \sin b_j \tau (m-k)],$$

$$U_{k-1,j} = e^{a_j \tau (q-(k-1))} [b_j \cos b_j \tau (m-(k-1)) - a_j \sin b_j \tau (m-(k-1))],$$

$$H_{k,j} = e^{a_j \tau (q-k)} \cos b_j \tau (m-k),$$

$$H_{k-1,j} = e^{a_j \tau (q-(k-1))} \cos b_j \tau (m-(k-1)),$$

$$D_j = a_j^2 + b_j^2;$$

2) если комплексные корни действительную часть, не равную нулю: $(s_q, s_j) = (a_q + ib_q, a_j + ib_j)$ имеют только дей-

$$\begin{aligned} a_{mn}(q\tau) &= \int_0^{q\tau} \sum_{j=1}^8 A_j \cdot e^{S_j(q\tau-t_1)} \cdot P(t_1) dt_1 = \sum_{k=1}^q \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} \sum_{j=1}^8 A_j \cdot e^{a_j \tau (q-t_1)} \cdot P(t_1) dt_1 = \\ &= \sum_{j=1}^8 \sum_{k=1}^q A_j \left\{ P_k \left[\frac{1}{a_j^2 \tau} e^{a_j \tau (q-(k-1))} - \frac{1}{a_j} e^{a_j \tau (q-k)} - \frac{1}{a_j^2 \tau} e^{a_j \tau (q-k)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + P_{k-1} \left[\frac{1}{a_j} e^{a_j \tau (q-(k-1))} - \frac{1}{a_j^2 \tau} e^{a_j \tau (q-(k-1))} + \frac{1}{a_j^2 \tau} e^{a_j \tau (q-k)} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (13)$$

3) если комплексные корни мнимую часть, не равную нулю: $(s_q, s_j) = (a_q + ib_q, a_j + ib_j)$ имеют только

$$\begin{aligned}
a_{mn}(q\tau) &= \int_0^{\tau} \sum_{j=1}^8 A_j \cdot e^{S_j(q\tau-t_1)} \cdot P(t_1) dt_1 = \\
&= \sum_{k=1}^q \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} \sum_{j=1}^8 A_j \cdot (1 + i \sin b_j(q\tau - t_1)) \cdot P(t_1) dt_1 = \\
&= \sum_{j=1}^8 \sum_{k=1}^q A_j \left\{ P_k \left[\frac{\cos b_j \tau(q-k) - \sin b_j \tau(q-k)}{b_j} + \right. \right. \\
&\quad + \frac{\cos b_j \tau(q-k) + \sin b_j \tau(q-k)}{b_j^2 \tau} - \frac{\cos b_j \tau(q-(k-1)) + \sin b_j \tau(q-(k-1))}{b_j^2 \tau} \\
&\quad + P_{k-1} \left[\frac{\sin b_j \tau(q-(k-1)) - \cos b_j \tau(q-(k-1))}{b_j} - \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\cos b_j \tau(q-k) + \sin b_j \tau(q-k)}{b_j^2 \tau} + \frac{\cos b_j \tau(q-(k-1)) + \sin b_j \tau(q-(k-1))}{b_j^2 \tau} \right] \right\}.
\end{aligned} \quad (14)$$

Нормальное перемещение срединной поверхности оболочки примет вид

$$w(x, y, t) = \sum_m \sum_n a_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{R}.$$

В результате итерационного процесса находим значения $w(t)$ на каждом шаге по времени. Графики изменения этих величин приведены на рисунках 2, 3 и 4.

Применяя методы численного дифференцирования к системе уравнений (2), можно получить $u(x, y, t), v(x, y, t), \beta_x(x, y, t), \beta_y(x, y, t)$.

Тогда, зная компоненты перемещения точек срединной поверхности и углы поворота в направлении координатных осей, можем получить деформации на поверхности цилиндрической оболочки барабана. Зная деформации, легко получить напряжения в искомых точках, что и показано на рисунках 2-4.

Получение значений интенсивности деформации связано с численным дифференцированием и потерей точности.

Однако, полученное аналитическое решение позволяет сделать вывод, что зависимость

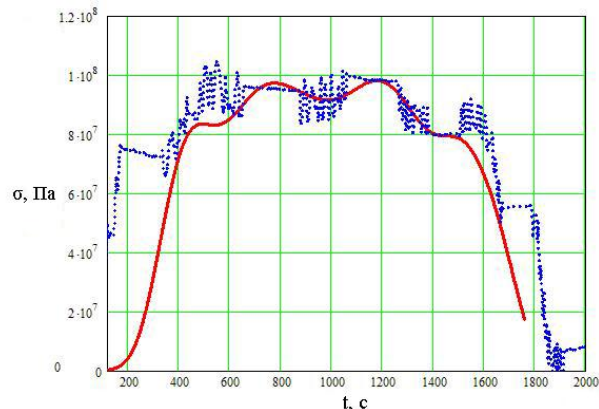


Рис. 2. Напряжения, Па в точках 7-8 в зависимости от времени, с

перемещений (12 – 14) и деформаций от параметров нагрузки и оболочки не носит мультипликативный характер.

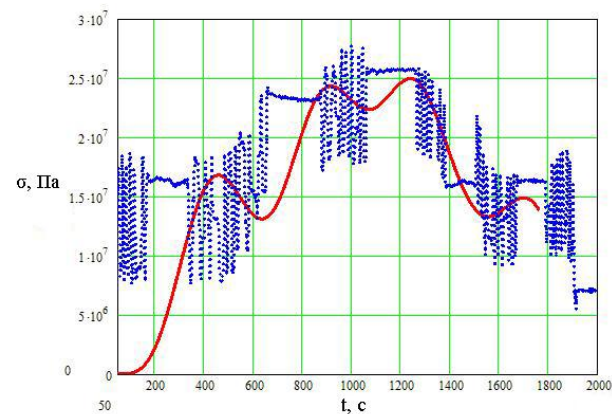
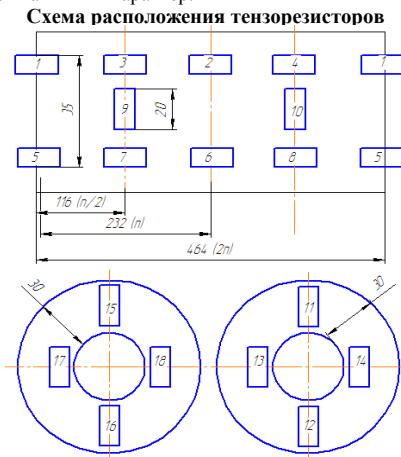


Рис. 3. Напряжения, Па в точках 3-4 в зависимости от времени, с

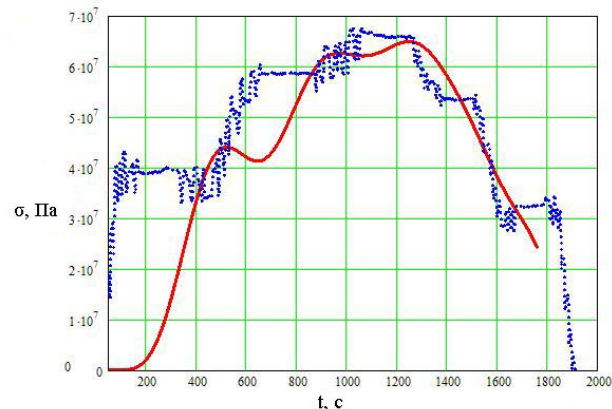


Рис. 4. Напряжения, Па в точках 9-10 в зависимости от времени, с

4. Выводы

Представленное решение получено с использованием теории Герца о статическом деформировании контактирующих объектов: каната и оболочки. Решение получены в перемещениях, оценка деформаций и напряжений требует двойного дифференцирования, что связано с дополнительной потерей точности. Это объясняется тем, что на участке гладкого и монотонного изменения перемещений их вторые производные, отражающие деформации, претерпевают резкие изменения. Градиенты изменения деформаций значительно превышают градиенты изменения перемещений.

Решение получено для всей оболочки, что предопределяет его сложность тогда, как интерес представляет гораздо более ограниченная область вокруг места контакта.

Наиболее целесообразным является построение зависимостей, в которых учтено взаимное

влияние основных характеристик нагрузки и объекта.

Среди приложений задачи прочности оболочечных элементов барабана при многослойной навивке каната на барабан можно отметить такие задачи, как определение прочности барабана подъемно-транспортных, шахтных и прочих сооружений; прочности элементов тонкостенных конструкций при производстве различных технологических операций или при воздействии на них эксплуатационных нагрузок.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ковальский, Б.С. Теория многослойной навивки каната. // Доклады Академии Наук СССР 1950. Том LXXIV, №3. МЕХАНИКА 1950. С – 429-431
2. Александров, М. П. Грузоподъемные машины : учебник/ М. П Александров. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 552 с. – ISBN 5-7038-1519-9.